自由落下水膜の自励振動およびその発生メカニズム (非線形波動現象の構造と力学)

京藤, 敏達; 加瀬, 直人; 前田, 直輝

数理解析研究所講究録 1271 巻 2002 年 191-200

自由落下水膜の自励振動およびその発生メカニズム

筑波大学機能工学系 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH)
Inst. of Engineering Mechanics and Systems, Univ. Tsukuba
筑波大学大学院理工学研究科 加瀬 直人 (Naoto KASE)
Master's Program in Engineering, Univ. Tsukuba
筑波大学大学院理工学研究科 前田 直輝 (Naoki MAEDA)
Master's Program in Engineering, Univ. Tsukuba
茨城県つくば市 305-8573(kyotoh@kz.tsukuba.ac.jp)

2002 年 12 月

概要

The nappe oscillation is examined and predicted by a model based upon the potential flow theory. The shear waves appearing on the sheet and leading to the sheet break-up are discussed by a linear stability analyses of the Navier -Stokes equation.

1 序論

堰から越流する水膜は、落下に伴って自励振動を始める。水膜が空気中を振動しながら落下することで低周波音が発生し、また、振動振幅が増大すると水膜の破れが生じる。したがって、この現象の理解は滝における水滴の生成や水空間の設計にとって重要である。

水膜振動はナップの脈動現象に関連して過去に研究された [1, 2, 3]．ナップの振動の発生原因としては，ゲートと水膜背面の空気の連成振動 [4] および水膜上に発生する不安定波が考えられ，実際の現象はこれらが重合した形で起きている．また，水膜厚さが流れ方向に変化する流れの安定問題はフィルムのコーティングの際の液膜の安定性と関連して研究されている [3]．これら水膜の全体的な運動に対して，Taylor は水の表面張力が支配的となる空間スケールにおける水膜上の波・水膜の破れ・水滴生成について実験および理論から探求した [5, 6]．この方面の研究は液体の微粒化と併せてさらなる研究が進められている．とくに，液膜流の安定問題は，液体の噴霧化（燃料の混合）に関連して，実験的 [7] および理論的 [8] に研究されている．ただし，この現象では空気流によるせん断応力が支配的であるため，重力の効果は無視されている．一方，自由落下水膜は重力により厚さが変化し，本実験において水膜ばらけ位置における水膜厚さは数ミリ，落下速度は 6m/s であり，空気の影響を大きく受けている．

過去の実験から理解されるように [9]，落下水膜の振動を議論する際にはその原因を大きく別けて２つ考慮する必要がある．１つ目は水膜と背後に閉じ込められた空気の連成振動による不安定性，２つ目は落下水によって加速された空気流のせん断不安定である．水膜の落下高さが小さく，水膜前面もしくは背面の空気が閉じ込められている場合は前者の要因が支配的であり，水膜の落下高さが大きく水膜前後の空間が吹き抜けになっている場合には後者の要因が水膜振動に大きく関与する．水膜振動を理論的に予測する際に考慮すべき点を挙げると次のようになる．(A) 非一様流．(B) 重力の効果．(C) 空気を媒介とする圧力の伝播．(D) 水および空気のせん断流の不安定．(E) 水の表面張力の影響．ここでは，理論的検討の初期段階として水膜振動の Kelvin-Helmholtz 不安定性および空気流のせん断不安定性について検

2 Kelvin-Helmholtz不安定性ー水膜と空気の連成振動

水膜前面および背面の空気が鉛直壁，水面，上壁面などで囲まれているときは，局所的な水膜変動の影響は空気を通して水膜全体に伝播する．本節では水膜全体の運動を対象とし，水膜と空気の間に生じるせん断流の効果は無視する．それゆえ，流れ場は渦無しであると仮定する．水膜前後の空間が様々な幾何学形状をもつ場合に適用可能な物理モデルを求めるために，水膜の運動方程式と水膜に作用する圧力を別々に導く．

2.1 基礎方程式

まず，水流の運動方程式はラプラス方程式および圧力方程式であり次式で与えられる．

$$\Delta\phi = 0, \quad \frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \phi_I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_I}{\partial y}\right)^2\right\} - gx + \frac{P_I}{\rho_w} = 0 \tag{1}$$

ここで，ϕ_I および P_I はそれぞれ速度ポテンシャルと圧力である．下付添字の I は水膜部分における諸量を表わし，ρ_w は水の密度，g は重力加速度である．t は時間，x, y は空間座標で x 軸は鉛直下方が正となるように選んだ．水膜と空気の２つの界面の位置を η_r, η_{ell} と置くと，水流に対する境界条件は

$$P_I + T\kappa_\alpha - P_{S\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \phi_I}{\partial x}\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x} \quad - \frac{\partial \phi_I}{\partial y} = 0, \quad at\ \ y = \eta_\alpha,\ \alpha = r, \ell \tag{2}$$

で与えられる．下付添字の α は r もしくは ℓ であり，水流の右側を r，左側を ℓ で表わすことでそれぞれの界面における値を区別する．ここで，$P_{S\alpha}$ は界面における空気流の圧力，T は表面張力係数，κ_α は界面の曲率である．

さて，x 方向の空間スケールが y 方向の空間スケールに比べて極めて大きい運動を対象とし

$$\mathcal{O}(\partial/\partial x)/\mathcal{O}(\partial/\partial y) = \epsilon \ll 1 \tag{3}$$

を仮定する．また，流体の加速度は重力加速度と同オーダであるとする．以上の仮定のもとに摂動解として

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha &= \eta_{\alpha 0}(x,t) + \delta\eta_{\alpha 1}(x,t) + \cdots, \\
\phi_I &= \phi_{\alpha 0}(x,y,t) + \delta\phi_{\alpha 1}(x,y,t) + \cdots, \\
P_{S\alpha} &= P_{S\alpha 0}(x,t) + \delta P_{S\alpha 1}(x,t) + \cdots, \\
\delta &\equiv \epsilon^2
\end{aligned} \tag{4}$$

を与え，基礎方程式に代入し各オーダの方程式を求め整理すると次式が得られる [3].

$$\frac{\partial Y_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U_0 Y_s) = 0, \tag{5}$$

$$\rho_w\left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0\frac{\partial U_0}{\partial x}\right) = (\rho_w - \rho_a)g, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&2\rho_w Y_s \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t^2} + 2\rho_w Y_s\left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0\frac{\partial U_0}{\partial x}\right)\frac{\partial Y_m}{\partial x} \\
&+4\rho_w Y_s U_0 \frac{\partial^2 Y_m}{\partial t \partial x} + \left(2\rho_w Y_s {U_0}^2 - 2T\right)\frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2} \quad = P_{S\ell 1} - P_{Sr1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

ただし，

$$U_0 = \frac{\partial \phi_{I0}}{\partial x},\ Y_s = \frac{1}{2}(\eta_{r0} - \eta_{\ell 0}),\ Y_m = \frac{1}{2}(\eta_{r0} + \eta_{\ell 0}), \tag{8}$$

である．式 (5) は体積保存則，式 (6), (7) は鉛直方向および水平方向の運動方程式である．式 (6) から U_0，次に式 (5) から Y_s，最後に式 (7) から Y_m を決定する．ただし，空気流の界面における圧力 $P_{S\alpha}$ は界面変位 η_α の関数となる．

前述の圧力を決定するためには，空気流のポテンシャル関数を求めれば良い．空気流に対する基礎方程式もラプラス方程式であり，その解は界面における境界条件

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} = \left\{1 + \left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x}\right)^2\right\}^{-1/2} \left(-\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x}\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y}\right), \quad y = \eta_\alpha \tag{9}$$

および水膜前後の空間の境界上での運動学的条件から決定することができる．ただし，$\alpha = r, \ell$ である．研究の初期段階として，ここでは水膜振動が小さく水膜表面の平均位置が鉛直平面であるとする．このとき矩形領域にグリーンの定理を適用し，グリーン関数として境界上でその法線微分が 0 となるものを用いれば，ポテンシャル関数は次式で与えられる．

$$\phi_{S\alpha 1}(x,t) = 2\int_0^h G_\alpha(x,\overline{x})\frac{\partial \eta_{\alpha 0}}{\partial t}(\overline{x},t)d\overline{x}, \quad G_\alpha(x,\overline{x}) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi x}{h}\cos\frac{n\pi\overline{x}}{h}}{n\tanh\frac{n\pi L_\alpha}{h}}. \tag{10}$$

ここで，h は水膜の落下高さ，$y = L_\alpha$ は矩形領域の鉛直壁の位置である．ここでは長波近似を用いておらず，上式は任意の h/L_α に適用される．ポテンシャル流においては，空気の流れは水膜表面の法線方向変位によって引き起こされるため水膜変位が小さいとき空気流の非線形性は無視される．したがって，圧力は主に運動の非定常性から生じ，圧力方程式によって

$$P_{S\alpha 1}(x,t) = -2\rho_a\int_0^h G_\alpha(x,\overline{x})\frac{\partial^2 \eta_{\alpha 0}}{\partial t^2}(\overline{x},t)d\overline{x}, \tag{11}$$

で与えられる．これを水膜の水平方向の運動方程式に代入すれば閉じた方程式系が得られる．

また、水膜前後に壁面がなく、無限領域に水膜が落下している状況では圧力表示は次式で与えられる。

$$P_{S\alpha 1}(x,t) = -\frac{\rho_a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left|\frac{x}{h} - \frac{\overline{x}}{h}\right|\frac{\partial^2 \eta_{\alpha 0}}{\partial t^2}(\overline{x},t)d\overline{x}, \tag{12}$$

3 空気流のせん断不安定性による波動

水膜と空気の界面におけるせん断流が水膜に与える効果を見るために、ここでは粘性流体の運動を解析する。前節と同様に、まず水流の運動方程式を解く。この際、水膜が気流から受ける応力は外力として運動方程式に現れる。次に、水と空気界面の速度の連続条件を使い、水膜上で空気の速度を境界条件として与え、空気流の解を求める。この空気流の解から水膜上の応力を求めれば、閉じた方程式系が得られる。

3.1 水膜の運動方程式

水膜は鉛直下方に重力により徐々に加速されるため、ポテンシャル流の場合と同様に x 方向の変化率は y 方向の変化率に比べて小さいと仮定する。ただし、粘性流体では粘性のスケールを指定する必要がある。自由落下水膜は加速に伴って水膜内の境界層が発達し、一方で水膜厚さは減少する。ここでは、境界層近似を用いることにより、粘性項の効果についても検討する。境界層近似の方程式は、よく知られているように、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_w}{\partial x} + \frac{\partial v_w}{\partial y} = 0 \\
&\rho_w\left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + u_w\frac{\partial u_w}{\partial x} + v_w\frac{\partial u_w}{\partial y}\right) - \mu_w\frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} - (\rho_w - \rho_a)g = 0 \\
&\frac{\partial p_w}{\partial y} = \rho_w\left(\frac{\partial v_w}{\partial t} + u_w\frac{\partial v_w}{\partial x} + v_w\frac{\partial v_w}{\partial y}\right) - \mu_w\frac{\partial^2 v_w}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{13}$$

で与えられる。ポテンシャル流では、いわゆる長波近似によって y 方向の関数形を解析的に決定することができたが、粘性流体の場合には上記の微分方程式を解く必要がある。水膜内で境界層が十分発達しているとき、水膜内の流速は水膜横断方向の距離のベキ級数で展開される。本論文では、境界層方程式において粘性項が加味されるように u_w は y の 2 次のベキまで、また、この u に対して連続式が満たされるように v_w は y の 3 次のベキまでを考慮する。

$$\begin{aligned} u_w(x,y,t) &\approx u_{w0}(x,t) + yu_{w1}(x,t) + y^2u_{w2}(x,t) \\ v_w(x,y,t) &\approx v_{w0}(x,t) + yv_{w1}(x,t) + y^2v_{w2}(x,t) + y^3v_{w3}(x,t) \end{aligned} \tag{14}$$

上式を境界層方程式 (13) に代入すると

$$EqMx \equiv \rho_w\Big(\frac{\partial u_{w0}}{\partial t} + u_{w0}\frac{\partial u_{w0}}{\partial x}\Big) - \rho_w g - 2\mu_w u_{w2} = 0 \tag{15}$$

また、水膜表面の運動学的条件に代入後、整理すると

$$EqK_{S\ell} \equiv -v_{w0} + \frac{\partial \eta_\ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{w0}\eta_\ell + \frac{1}{2}u_{w1}{\eta_\ell}^2 + \frac{1}{3}u_{w2}{\eta_\ell}^3\Big) = 0, \quad \ell = p, n \tag{16}$$

同様に水膜上の法線および接線応力の連続条件は、それぞれ

$$EqSn_\ell \equiv -Sn_\ell - p_w(x,\eta_\ell,t) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(2\mu_w u_{w0} + 2\mu u_{w1}\eta_\ell + 2\mu_w u_{w2}{\eta_\ell}^2 + S\frac{\partial \eta_\ell}{\partial x}\Big) = 0, \quad \ell = p, n \tag{17}$$

および

$$EqSt_\ell \equiv -St_\ell + \mu_w u_{w1} + 2\mu_w u_{w2}\eta_\ell = 0, \quad \ell = p, n \tag{18}$$

となる。ここで、Sn_ℓ および St_ℓ は水膜が空気から受ける法線および接線応力である。一方、水膜内の圧力は境界層方程式 (13) の第 2 式から

$$\begin{aligned} p_w(x,y,t) \;\approx\;& p_{wm}(x,t) - \rho_w y\Big(\frac{\partial v_{w0}}{\partial t} + \frac{\mu_w}{\rho_w}\frac{\partial u_{w1}}{\partial x} + u_{w0}\frac{\partial v_{w0}}{\partial x} - v_{w0}\frac{\partial u_{w0}}{\partial x}\Big) \\ & -\rho_w\frac{y^2}{2}\Big\{\frac{\partial^2 u_{w0}}{\partial t\partial x} + \Big(\frac{\partial u_{w0}}{\partial x}\Big)^2 + 2\frac{\mu_w}{\rho_w}\frac{\partial u_{w2}}{\partial x} + u_{w1}\frac{\partial v_{w0}}{\partial x} - v_{w0}\frac{\partial u_{w1}}{\partial x}\Big\} \end{aligned} \tag{19}$$

で与えられる。ここで $p_{wm}(x,t)$ は水膜中心 $y = 0$ における圧力である。ただし、上式の導出では近似 (14) を考慮し、y に関して 3 次以上の多項式は無視した。

3.2 気流の運動方程式

気流が水膜に及ぼす力を算定するためには、気流の運動方程式を解き、水膜との界面における応力を求める必要がある。そのためには、ナビエ・ストークス方程式

$$\begin{aligned} &\rho_a\Big(\frac{\partial u_a}{\partial t} + u_a\frac{\partial u_a}{\partial x} + u_a\frac{\partial u_a}{\partial y}\Big) + \frac{\partial p_a}{\partial x} - \mu_a\Delta u_a = 0 \\ &\rho_a\Big(\frac{\partial v_a}{\partial t} + u_a\frac{\partial v_a}{\partial x} + u_a\frac{\partial v_a}{\partial y}\Big) + \frac{\partial p_a}{\partial y} - \mu_a\Delta v_a = 0 \\ &\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

を粘着条件

$$\begin{aligned} Equ_\ell &\equiv -u_a(x,\eta_\ell,t) + u_{w0} + u_{w1}\eta_\ell + u_{w2}{\eta_\ell}^2 = 0, \quad \ell = p, n \\ Eqv_\ell &\equiv -v_a(x,\eta_\ell,t) + v_{w0} - \frac{\partial u_{w0}}{\partial x}\eta_\ell - \frac{1}{2}\frac{\partial u_{w1}}{\partial x}{\eta_\ell}^2 - \frac{1}{3}\frac{\partial u_{w2}}{\partial x}{\eta_\ell}^3 = 0, \quad \ell = p, n \end{aligned} \tag{21}$$

および無限遠で速度が 0 となる条件のもとで解き、その解から界面における応力を算定しなければならない。仮にこの方程式が解けたとすると、水膜の運動方程式中の応力 Sn_ℓ および St_ℓ は、式 (21) に現れる変数 $\eta_p, \eta_n, u_{w0}, u_{w1}, u_{w2}, v_{w0}$ の関数となる。式 (15)~(18) に含まれる未知関数は p_{wm} を含め 7 つであり、これら 7 本の方程式を解けば原理的に解を決定することができる。

3.3　薄膜に対する方程式

高レイノルズ数流れでは、粘性応力に比例する項 u_{w1}, u_{w2} は慣性項に比べて小さい。そこで、第1近似として

$$u_{w1} = 0, \quad u_{w2} = 0 \tag{22}$$

と置き、前節で導いた方程式の近似解を求める。この方法の妥当性は、以下の漸化式の解の $n \to \infty$ における収束性により判定される。

$$\begin{aligned}
&EqMx^{(n)} \equiv \rho_w\Big(\frac{\partial u_{w0}^{(n)}}{\partial t} + u_{w0}^{(n)}\frac{\partial u_{w0}^{(n)}}{\partial x}\Big) - (\rho_w - \rho_a)g - 2\mu_w u_{w2}^{(n)} = 0,\\
&EqK_{S\ell}^{(n)} \equiv -v_{w0}^{(n)} + \frac{\partial \eta_\ell^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(u_{w0}^{(n)}\eta_\ell^{(n)} + \frac{1}{2}u_{w1}^{(n)}\eta_\ell^{(n)^2} + \frac{1}{3}u_{w2}^{(n)}\eta_\ell^{(n)^3}\Big) = 0,\\
&EqSn_\ell^{(n)} \equiv -Sn_\ell^{(n)} - p_w^{(n)}(x, \eta_\ell^{(n)}, t) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(2\mu_w u_{w0}^{(n)} + 2\mu u_{w1}^{(n)}\eta_\ell^{(n)} + 2\mu_w u_{w2}^{(n)}\eta_\ell^{(n)^2} + S\frac{\partial \eta_\ell^{(n)}}{\partial x}\Big) = 0,\\
&EqSt_\ell^{(n)} \equiv -St_\ell^{(n)} + \mu_w u_{w1}{}^{(n+1)} + 2\mu_w u_{w2}{}^{(n+1)}\eta_\ell^{(n)} = 0, \qquad \ell = p, n
\end{aligned} \tag{23}$$

上式中 $Sn_\ell^{(n)}, St_\ell^{(n)}$ および $p_w^{(n)}$ の添え字 n は n ステップ目の速度により算定された応力および圧力であることを示す。

第0近似解 $u_{w1}^{(0)} = 0,\ u_{w2}^{(0)} = 0$ を式(23)に代入し整理すると、x 方向の運動方程式、質量保存則、および、水膜の横方向の運動方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial u_{w0}^{(0)}}{\partial t} + u_{w0}^{(0)}\frac{\partial u_{w0}^{(0)}}{\partial x} = g \tag{24}$$

$$\frac{\partial Y_s^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(Y_s^{(0)}u_{w0}^{(0)}\big) = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&2\rho_w Y_s\frac{\partial^2 Y_m^{(0)}}{\partial t^2} + 2\rho_w Y_s^{(0)}\left(\frac{\partial u_{w0}^{(0)}}{\partial t} + u_{w0}^{(0)}\frac{\partial u_{w0}^{(0)}}{\partial x}\right)\frac{\partial Y_m^{(0)}}{\partial x}\\
&+4\rho_w Y_s^{(0)}u_{w0}^{(0)}\frac{\partial^2 Y_m^{(0)}}{\partial t\partial x} + \big(2\rho_w Y_s^{(0)}u_{w0}^{(0)^2} - 2T\big)\frac{\partial^2 Y_m^{(0)}}{\partial x^2} \quad = Sn_p^{(0)} - Sn_n^{(0)}
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで、Y_s, Y_p の定義式

$$Y_s = \frac{1}{2}(\eta_p - \eta_n), \quad Y_m = \frac{1}{2}(\eta_p + \eta_n) \tag{27}$$

および

$$v_{w0}^{(0)} = \frac{\partial Y_m^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(Y_m^{(0)}u_{w0}^{(0)}\big) \tag{28}$$

を用いた。方程式(24)~(26)はポテンシャル流の場合に導いたものと同型である。

次に式(26)中の応力 $Sn_p^{(0)}$ および $Sn_n^{(0)}$ を算定する。まず、空気流に対する境界条件は方程式(21)から

$$\begin{aligned}
u_a^{(0)}(x, \eta_\ell^{(0)}, t) &= u_{w0},\\
v_a^{(0)}(x, \eta_\ell^{(0)}, t) &= v_{w0}^{(0)} - \frac{\partial u_{w0}^{(0)}}{\partial x}\eta_\ell^{(0)} = \frac{\partial \eta_\ell^{(0)}}{\partial t} + u_{w0}^{(0)}\frac{\partial \eta_\ell^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad \ell = p, n
\end{aligned} \tag{29}$$

で与えられる。上第2式の変形には、運動学的条件(16)を用いた。上記の境界条件のもとで気流の運動方程式(20)の解を求めるために、まず定常流の解を求め、次にその摂動として非定常運動を考える。

3.4 定常流の解

定常流の場合には、式 (20) において境界層近似が適用される。自由落下水膜の定常流は y 軸に関して対称であるから、以下では $y>0$ の領域における流れを解析する。

$$\frac{\partial u_{as}}{\partial x}+\frac{\partial v_{as}}{\partial y}=0$$
$$\rho_a\left(u_{as}\frac{\partial u_{as}}{\partial x}+v_{as}\frac{\partial u_{as}}{\partial y}\right)-\mu_a\frac{\partial^2 u_{as}}{\partial y^2}=0 \tag{30}$$

ここで、u_{as}, v_{as} は定常流の流速を表わす。一方、境界条件は式 (24), (25) を解くことにより得られる関係

$$u_{w0}^{(0)}=\sqrt{2gx+u_{wI}}\approx\sqrt{2gx};\quad Y_s=b(x),\quad b(x)\equiv\frac{q}{2u_{w0}^{(0)}}\approx\frac{q}{2\sqrt{2gx}} \tag{31}$$

を使って、

$$u_{as}(x,b)=\sqrt{2gx},\quad v_{as}(x,b)=\sqrt{2gx}\,\frac{db}{dx}\approx 0, \tag{32}$$

と表現される。ここで、u_{wI} は水膜のノズル出口における水流の初速度、b は水膜厚さの 1/2、q は水膜の単位幅当たりの流量である。本論文で対象とするような越流水膜では、水膜上のほとんどの領域において、近似　$2gx>>u_{wI}$ が成立すると考えられる。

方程式系 (30),(32) で与えられる流れは、加速流の境界層の安定問題に関連して研究されている。その解は、いわゆる Falkner-Skan の相似解として知られており [10]、領域 $2gx>>u_{wI}$ に対して次式により与えられる。

$$u_{as}=\frac{\partial\psi_s}{\partial y},\quad v_{as}=-\frac{\partial\psi_s}{\partial x},\quad \psi_s=u_{w0}^{(0)}\delta f(\xi),\quad \xi=\frac{y-b}{\delta},\quad \delta=\sqrt{\frac{4\mu_a x}{3\rho_a u_{w0}^{(0)}}}$$
$$\frac{d^3 f}{d\xi^3}+f\frac{d^2 f}{d\xi^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2=0,\quad f|_{\xi=0}=0;\ \left.\frac{df}{d\xi}\right|_{\xi=0}=1;\ \left.\frac{df}{d\xi}\right|_{\xi\to\infty}=0 \tag{33}$$

上記の表示は $y\geq b$ に対するものであるが、$y\leq b$ についても同様である。とくに数値計算から

$$f\approx e^{-\xi} \tag{34}$$

であることが知られているため、以下では解析を容易にするために上記の近似式を用いる。

3.5 水膜に作用する応力

非定常流成分が定常流からの摂動で与えられる場合について、水膜表面に作用する応力 $Sn_p^{(0)}$ の近似解を求める。以下では、計算の煩雑さを避けるために、定常流の流下方向変化率、すなわち x 微分はすべて無視する。したがって、定常流成分は平行流と見なされる。

まず、流速および水膜表面の位置を

$$u_a^{(0)}=u_{as}+u_{af},\quad v_a^{(0)}=v_{as}+v_{af},\quad \eta_p^{(0)}=b+\eta_f,\quad for\ \ y\geq b \tag{35}$$

と置く。ここで、変動成分 u_{af}, v_{af} および eta_f は微小量であると仮定する。これを流体の法線応力表示式に代入し、定常流の x 微分を無視すると

$$Sn_p\approx -p_{af}-2\mu_a\frac{\partial u_{as}}{\partial y}\frac{\partial\eta_f}{\partial x}+2\mu_a\frac{\partial v_{af}}{\partial y},\quad at\ \ y=b \tag{36}$$

を得る。上式中圧力 p_{af} は、気流の x 方向の運動方程式

$$\frac{\partial p_{af}}{\partial x} = -\rho_a\Big(\frac{\partial u_{af}}{\partial t} + u_{as}\frac{\partial u_{af}}{\partial x} + v_{af}\frac{\partial u_{as}}{\partial y}\Big) + \mu_a\Big(\frac{\partial^2 u_{af}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{af}}{\partial y^2}\Big) \tag{37}$$

を積分することにより、流速を用いて表現される。

ここでは、定常流の x 方向変化率を無視しているため、流速変動が満たすべき方程式は平行流に乗った擾乱の支配方程式に一致する。

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + u_{as}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta v_{af} - \frac{\partial^2 u_{as}}{\partial y^2}\frac{\partial v_{af}}{\partial x} - \nu_a \Delta^2 v_{af} = 0, \quad \frac{\partial u_{af}}{\partial x} + \frac{\partial v_{af}}{\partial y} = 0 \tag{38}$$

上記の方程式に対する境界条件は、式 (29) に式 (35) を代入し高次項を無視すると

$$u_{af} = -\frac{\partial u_{as}}{\partial y}\eta_f, \quad v_{af} = \frac{\partial \eta_f}{\partial t} + u_{as}\frac{\partial \eta_f}{\partial x}, \quad at\ \ y = b \tag{39}$$

となる。この関係式を圧力算定式 (37) に代入すると水膜表面では慣性項は 0 となり、圧力勾配は粘性項と釣り合うことがわかる。一方、ポテンシャル流れの場合には圧力勾配と局所慣性項 $\partial u_{af}/\partial t$ が釣り合い、u_{af} は流れ場を解いて初めて決定され、これを代入することで圧力が算定される。

3.6 フーリエ空間における解

さて、方程式 (38) の時間周期的な解を求める。まず、以下の変数変換

$$v_{af} = u_{w0}^{(0)}\Phi(\chi, \xi)e^{-i\omega t}, \quad \chi = \frac{x}{\delta}, \quad \xi = \frac{y-b}{\delta} \tag{40}$$

を行い、式 (38) に代入すると

$$\Big(-i\Omega + f\frac{\partial}{\partial \chi}\Big)\bar{\Delta}\Phi - \frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} - \frac{1}{Re_a}\bar{\Delta}^2\Phi = 0, \qquad \bar{\Delta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tag{41}$$

を得る。ただし、上式中の無次元量は次式で定義される。

$$\Omega = \frac{\omega\,\delta}{u_{w0}^{(0)}}, \quad Re_a = \frac{u_{w0}^{(0)}\,\delta}{\nu_a} \tag{42}$$

また、上記の解析において、$b, u_{w0}^{(0)}$ および δ の x 微係数はすべて無視した。

次に、式 (41) に含まれるパラメータ Ω, Re_a の x 依存性を無視し、この方程式を変数 χ に関してフーリエ変換すと、Orr-Sommerfelds 方程式

$$(f-c)(\hat{\Phi}'' - k^2\hat{\Phi}) - f''\hat{\Phi} - \frac{1}{i\,k Re_a}(\hat{\Phi}^{\rm iv} - 2k^2\hat{\Phi}'' + k^4\hat{\Phi}) = 0, \quad \Omega \equiv \frac{\Omega}{k} \tag{43}$$

を得る。ここで、k は波数、$'$ は ξ に関する微分を意味する。同様にして境界条件 (39) に無次元化 (40) および

$$\eta_f = \delta\,\zeta\,e^{i\,\Omega t} \tag{44}$$

を適用し、χ に関してフーリエ変換すると

$$\hat{\Phi}'(0) = i\,k\,f'(0)\hat{\zeta}, \quad \hat{\Phi}(0) = i\,c\,\hat{\zeta} + i\,k\,f(0)\,\hat{\zeta} \tag{45}$$

が導かれる。ここでは、高レイノルズ数流れを対象とするため、無限遠で 0 に収束する 2 つの独立な解として Rayleigh 方程式の解 $\hat{\Phi}_{inv}$ および境界層解もしくは内部摩擦層解 $\hat{\Phi}_{vis}$ を用いる。これら 2 つの独

立な解の線形結合が境界条件 (45) を満たすようにその係数を決定すると、最終的な解は次式で与えられる。

$$\hat{\Phi}(\xi)=\frac{\hat{\Phi}'_{inv}(0)\,\hat{\Phi}(0)-\hat{\Phi}_{inv}(0)\,\hat{\Phi}'(0)}{\hat{\Phi}_{vis}(0)\hat{\Phi}'_{inv}(0)-\hat{\Phi}_{inv}(0)\hat{\Phi}'_{vis}(0)}\hat{\Phi}_{vis}(\xi)+\frac{\hat{\Phi}_{vis}(0)\,\hat{\Phi}'(0)-\hat{\Phi}'_{vis}(0)\,\hat{\Phi}(0)}{\hat{\Phi}_{vis}(0)\hat{\Phi}'_{inv}(0)-\hat{\Phi}_{inv}(0)\hat{\Phi}'_{vis}(0)}\hat{\Phi}_{inv}(\xi) \tag{46}$$

同様に水膜表面の圧力および法線応力を算定する。式 (37) を無次元化した後、フーリエ変換し、さらに $\xi=0$ と置くと

$$\bar{p}_{af}\equiv\frac{p_{af}}{\rho_a u_{w0}^{(0)2}},\quad \hat{\bar{p}}_{af}|_{\xi=0}=\frac{1}{Re_a}\Big(-\hat{\Phi}'(0)+\frac{1}{k^2}\hat{\Phi}'''(0)\Big) \tag{47}$$

が得られる。ここで、式 (37) の右辺の慣性項は水膜表面で 0 となることに注意する。上記の圧力表示を式 (36) のフーリエ変換に代入すると、法線応力 (36) は

$$\overline{Sn_p}\equiv\frac{Sn_p}{\rho_a u_{w0}^{(0)2}},\quad \hat{\overline{Sn_p}}|_{\xi=0}=-\frac{1}{Re_a}\Big(-3\hat{\Phi}'(0)+2ikf'(0)\hat{\zeta}+\frac{1}{k^2}\hat{\Phi}'''(0)\Big) \tag{48}$$

となる。原理的には、上式で与えられる応力のフーリエ変換を逆変換すれば物理面における表示式が得られる。式 (48) に含まれる $\hat{\Phi}'''(0)$ を計算するには、方程式 (43) を具体的に解く必要がある。

3.7 Orr-Sommerfelds 方程式の解

関数 f が指数関数の場合には、式 (43) で $Re_a\to\infty$ とした方程式の厳密解が知られている [11]。また、もう一方の解として内部摩擦層における漸近解を利用することができる [12]。まず、関数 f が式 (34) で与えられるとき、Rayleigh 方程式

$$(f-c)(\hat{\Phi}''-k^2\hat{\Phi})-f''\hat{\Phi}=0 \tag{49}$$

の無限遠で 0 に収束する解は、ガウスの超幾何関数を使って

$$\hat{\Phi}=\hat{\Phi}_{inv}(\xi),\quad \hat{\Phi}_{inv}(\xi)\equiv e^{-|k|\xi}{}_2F_1\big[|k|-\sqrt{1+k^2},|k|+\sqrt{1+k^2},1+2|k|,e^{-\xi}/c\big] \tag{50}$$

で与えられる。ここで、波数 k に絶対値が付いているのは、k の正負の値に対して無限遠での条件を満たすようにするためである。

一方、内部摩擦層における近似方程式

$$\hat{\Phi}^{\mathrm{iv}}-i\,k\,Re_a\,f'(\xi_s)(\xi-\xi_s)\hat{\Phi}''=0 \tag{51}$$

の解のうち無限遠で 0 に収束するものは次式で与えられる。

$$\hat{\Phi}=\hat{\Phi}_{vis}(\xi),\quad \hat{\Phi}_{vis}(\xi)=\frac{A\big[|kRe_af'(\xi_s)|^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_s)\big]}{|kRe_af'(\xi_s)|^{\frac{2}{3}}} \tag{52}$$

ただし、ξ_s は Rayleigh 方程式の特異点であり、

$$f(\xi_s)=c \tag{53}$$

を満たす。また、関数 A は波数 k の正負に応じて以下のように与えられる。

$$A[z]=\begin{cases}\displaystyle\int_{\infty}^{z}dz_2\int_{\infty}^{z_2}z_1^{\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\Big[\frac{2}{3}e^{-\frac{3i\pi}{4}}z_1^{\frac{3}{2}}\Big]dz_1, & for\quad -kRe_af'(\xi_s)>0\\ \displaystyle\int_{\infty}^{z}dz_2\int_{\infty}^{z_2}z_1^{\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\Big[\frac{2}{3}e^{\frac{3i\pi}{4}}z_1^{\frac{3}{2}}\Big]dz_1, & for\quad -kRe_af'(\xi_s)<0\end{cases} \tag{54}$$

ここで、$H_n{}^{(1)}$ と $H_n{}^{(2)}$ はそれぞれ n 次の第1種および第2種の Hankel 関数である。式 (54) の $-kRe_a f'(\xi_s)$: 0 に対する積分は、超幾何関数を用いると次式のように表わされる。

$$I_1(z_2)=\int^{z_2} z_1^{\frac{1}{2}}\,H_{\frac{1}{3}}{}^{(2)}\Big[\frac{2}{3}e^{-\frac{3i\pi}{4}}z_1{}^{\frac{3}{2}}\Big]dz_1,\quad I_2(z)=\int^{z}\big(I_1(z_2)-I_1(\infty)\big)dz_2 \tag{55}$$

ただし、

$$\begin{aligned}I_1(z_2)&=\frac{2\,i^{\frac{3}{2}}\Gamma[\frac{1}{3}]}{3^{\frac{7}{6}}\Gamma[\frac{2}{3}]\Gamma[\frac{4}{3}]}\,{}_1F_2\Big[\{\frac{1}{3}\},\{\frac{2}{3},\frac{4}{3}\},-i\,\frac{z_2{}^3}{9}\Big]z_2-\frac{i^{\frac{1}{2}}(1+i\,3^{\frac{1}{2}})\,\Gamma[\frac{2}{3}]}{3^{\frac{11}{6}}\Gamma[\frac{4}{3}]\Gamma[\frac{5}{3}]}\,{}_1F_2\Big[\{\frac{2}{3}\},\{\frac{4}{3},\frac{5}{3}\},-i\,\frac{z_2{}^3}{9}\Big]z_2{}^2\\I_2(z)&=\frac{2\,i^{\frac{3}{2}}\Gamma[\frac{1}{3}]}{3^{\frac{13}{3}}\Gamma[\frac{4}{3}]\Gamma[\frac{5}{3}]}\,{}_1F_2\Big[\{\frac{1}{3}\},\{\frac{4}{3},\frac{5}{3}\},-i\,\frac{z^3}{9}\Big]z^2-\frac{i^{\frac{1}{2}}(1+i\,3^{\frac{1}{2}})\Gamma[\frac{2}{3}]}{3^{\frac{11}{3}}\Gamma[\frac{4}{3}]\Gamma[\frac{5}{3}]}\,{}_1F_2\Big[\{\frac{2}{3}\},\{\frac{4}{3},\frac{5}{3}\},-i\,\frac{z^3}{9}\Big]z^3\\&\quad+\frac{2\,i^{\frac{11}{6}}(3\,i+3^{\frac{1}{2}})\Gamma[\frac{1}{3}]\Gamma[\frac{2}{3}]}{27\,\Gamma[\frac{4}{3}]\Gamma[\frac{5}{3}]}J_{-\frac{2}{3}}\Big[\frac{2}{3}\,i^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}\Big]\,z-I_1(\infty)\,z\end{aligned} \tag{56}$$

である。ここで、$J_{-2/3}[z]$ は $-2/3$ 次の Bessel 関数、${}_1F_2$ は Pochhammer の一般化された超幾何関数である。ただし、水表面、すなわち $\xi=0$ における式 (54) の関数 A の変数の偏角は以下のように選ぶ。

$$-\xi_s=e^{i\pi}\xi_s\quad for\ -kRe_a f'(\xi_s)>0;\qquad -\xi_s=e^{-i\pi}\xi_s\quad for\ -kRe_a f'(\xi_s)<0 \tag{57}$$

このとき、関数 A は $\xi=0$ を含む領域で解析的となる。$-kRe_a f'(\xi_s)<0$ の場合に対する積分も同様に行うことができる。

高レイノルズ数流れにおける圧力を評価するためには、内部摩擦層解の壁面上における $Re_a\to\infty$ の振る舞いを調べる必要がある。ところが、壁面 $\xi=0$ は内部摩擦層に含まれるため、壁面における式 (52) 中の関数 A の定義域は

$$|kRe_a f'(\xi_s)|^{\frac{1}{3}}\,\xi_s=O(1) \tag{58}$$

を満たす。したがって、漸近解を求めることは難しい。

一方、境界層解は、Orr-Sommerfelds 方程式 (43) の $\xi=0$ 近傍における近似方程式

$$\hat{\Phi}^{\rm iv}-i\,k\,Re_a\,(f(0)-c)\hat{\Phi}''=0 \tag{59}$$

の無限遠で 0 に収束する解によって与えられ、次のようになる。

$$\hat{\Phi}_{vis}(\xi)=\left\{\begin{array}{ll}\exp\big[-e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{k\,Re_a(f(0)-c)}\,\xi\big], & for\quad kRe_a(f(0)-c)>0\\ \exp\big[-e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{-k\,Re_a(f(0)-c)}\,\xi\big], & for\quad kRe_a(f(0)-c)<0\end{array}\right. \tag{60}$$

上式を式 (46) に代入し、$|kRe_a(f(0)-c)|>>1$ の場合について漸近解を求めると

$$\hat{\Phi}'''(0)\approx\Lambda^2\Big(\hat{\Phi}'(0)-\frac{\hat{\Phi}'_{inv}(0)}{\hat{\Phi}_{inv}(0)}\hat{\Phi}(0)\Big)+\Lambda\Big\{-\frac{\hat{\Phi}'_{inv}(0)}{\hat{\Phi}_{inv}(0)}\hat{\Phi}'(0)+\Big(\frac{\hat{\Phi}'_{inv}(0)}{\hat{\Phi}_{inv}(0)}\Big)^2\hat{\Phi}(0)\Big\}+O(\Lambda^0) \tag{61}$$

ここで、

$$\Lambda=\left\{\begin{array}{ll}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{|k\,Re_a(f(0)-c)|}, & for\quad kRe_a(f(0)-c)>0\\ e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{|k\,Re_a(f(0)-c)|}, & for\quad kRe_a(f(0)-c)<0\end{array}\right. \tag{62}$$

である。高レイノルズ数流れ場中の圧力は式 (61) の第一項で評価される。式 (47) に式 (61) を代入し、$Re_a\to\infty$ の極限をとると

$$\hat{p}_{af}|_{\xi=0}=(1-c)\Big[1+\Big(1+\frac{c}{k}\Big)\frac{1+i\pi-\frac{1}{k}+\log\big(\frac{1}{c}-1\big)}{1+\big\{1+i\pi-\frac{1}{k}+\log\big(\frac{1}{c}-1\big)\big\}\big(\frac{1}{c}-1\big)}\Big]\,\hat{\zeta}. \tag{63}$$

ここで、$\hat{\Phi}_{inv}(0)$ および $\hat{\Phi}'_{inv}(0)$ に対して以下の近似を用いた。

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{inv}(0) &\approx 1 + \left\{1 + i\pi - \frac{1}{k} + \log\left(\frac{1}{c} - 1\right)\right\}\left(\frac{1}{c} - 1\right), \\ \hat{\Phi}'_{inv}(0) &\approx 1 + i\pi - \frac{1}{k} + \log\left(\frac{1}{c} - 1\right) \end{aligned} \tag{64}$$

4 結論および考察

ナップの振動を予測するモデルを導いた。このモデルにより実験で観察された水膜振幅の変調現象が説明される。また、落下水膜によって加速された空気流のせん断不安定性により水膜が自励振動すると考え、粘性を考慮したモデルの導出を試みた。本報告の解析をさらに検討し、より現実的なモデルを導出する予定である。

参考文献

[1] 本間 仁, 荻原国宏：フラップゲートの振動についての理論解析, 土木学会論文報告集, No.238, pp.43-53, 1975.

[2] Casperson, L. W.: Fluttering fountains, J. Sound and Vibration, Vol. 162(2), pp.251-262, 1993.

[3] Weinstein, S. J., A. Clarke, A. G. Moon and E. A. Simister: Time-dependent equations governing the shape of a two-dimensional liquid curtain, Part 1: Theory, Phys. Fluids, Vol. 9(12), pp.3625-3636, 1997.

[4] Shwartz, H. I.: Projected nappes subject to harmonic pressures, Proc. Inst. Civil Engineers., Vol.28, pp.313-326, 1964.

[5] Taylor, G. I.: The dynamics of thin sheet of fluid, II. Waves on fluid sheets, Proc. R. Soc. Lond., A253, pp.296-312, 1959a.

[6] Taylor, G. I.: The dynamics of thin sheet of fluid, III. Disintegration of fluid sheets, Proc. R. Soc. Lond., A253, pp.313-321, 1959b.

[7] Mansour, A. and N. Chigier: Dynamic behavior of liquid sheets, Phys. Fluids, Vol. A3(12), pp.2971-2980, 1991.

[8] Mehring, C. and W. A. Sirignano: Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets, J. Fluid Mech., Vol. 388, pp.69-113, 1999.

[9] Kyotoh, H., R. Nakamura and P. J. Baruah: Incipient oscillations of a sheet of falling water and the instability mechanisms, J. Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol. 20, No.1, 2002.

[10] Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, McGRAW-HILL, 647 p., 1960.

[11] Hughes, T. H. and W. H. Reid: On the stability of the asymptotic suction boundary-layer profile, J. Fluid Mech., Vol. 23, No. 4, pp. 715-735, 1965.

[12] 巽 友正, 後藤金英：流れの安定性理論, 産業図書, 275 p., 1976.